1.1. Lors du mouvement le chariot est soumis uniquement à son poids, force conservative dérivant d'une énergie potentielle $E_p = mgz$ ou z est l'altitude du chariot, et à la réaction du support, de travail nul en l'absence de frottements, négligés.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, le système n'étant soumis qu'à des forces conservatives ou de travail nul, l'énergie mécanique E_m se conserve.

Donc $E_m(B) = E_m(A)$ donc $E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A)$.

Par définition, $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg(z_A - z_B)$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gr_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right)}}$$

Nous allons procéder de la même manière pour déterminer l'expression littérale de la norme de la vitesse du chariot en C et en D.

$E_m(C) = E_m(B)$ donc $E_c(C) + E_p(C) = E_c(B) + E_p(B)$.

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgz_C = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$$

$$v_C^2 = v_B^2 + 2g(z_B - z_C)$$

$$v_C^2 = 2gr_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 2gLsin(\alpha_1)$$

$$v_C^2 = 2g\left[r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1)\right]$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{2g\left[r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1)\right]}}$$

$E_m(D) = E_m(C)$ donc $E_c(D) + E_p(D) = E_c(C) + E_p(C)$.

$$\frac{1}{2}mv_D^2 + mgz_D = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgz_C$$

$$v_D^2 = v_C^2 + 2g(z_C - z_D)$$

$$v_D^2 = 2g\left[r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1)\right] + 2gr_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right)$$

$$v_D^2 = 2g\left[2\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1)\right]$$

$$\boxed{v_D = \sqrt{2g\left[2\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1)\right]}}$$

1.2.

1.2.1. Procédons de la même manière entre D et M :

$E_m(M) = E_m(D)$ donc $E_c(M) + E_p(M) = E_c(D) + E_p(D)$

$$\frac{1}{2}mv_M^2 + mgz_M = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgz_D$$

$$v_M^2 = v_D^2 + 2g(z_D - z_M)$$

$$\boxed{v_M = \sqrt{2g\left[2\, r_1\left(1-cos(\alpha_1)\right) + L\, sin(\alpha_1) - r_2\left(1-cos(\theta)\right)\right]}}$$

1.2.2. Pour que le chariot arrive en E, il est nécessaire que sa vitesse ne s'annule pas avant (il ne peut pas décoller avant θ_E).

Donc, il faut que $\forall\theta < \frac{\pi}{2}, v_M > 0$.

Donc que $2g\left[2\, r_1\left(1-cos(\alpha_1)\right) + L\, sin(\alpha_1) - r_2\right] > 0$.

Donc que $2\, r_1\left(1-cos(\alpha_1)\right) + L\, sin(\alpha_1) - r_2 > 0$

Donc que $\boxed{L > \frac{r_2 - 2\, r_1\left(1-cos(\alpha_1)\right)}{sin(\alpha_1)}}$.

1.2.3. On en déduit immédiatement que $\boxed{L_1 = \frac{r_2 - 2\, r_1\left(1-cos(\alpha_1)\right)}{sin(\alpha_1)}}$.

Numériquement, $\boxed{L_1 = 28\ cm}$.

1.3.

1.3.1. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au chariot dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le mouvement étant circulaire tant que le chariot est au contact du rail, nous utiliserons un repère centré sur en coordonnées polaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha})$.

Le système est soumis à deux forces :

- Son poids : $\vec{P} = mg(-cos(\alpha)\,\vec{e_r} + sin(\alpha)\,\vec{e_\alpha})$
- La réaction du support : $\vec{R} = R\,\vec{e_r}$.

Soit $\vec{a}$ l'accélération du chariot. La seconde loi de Newton s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$.

Or $\overrightarrow{O_1M} = r_1\,\vec{e_r}$ donc $\vec{v_M} = r_1\,\dot{\alpha}\,\vec{e_\alpha}$ et $\vec{a} = -r_1\,\dot{\alpha}^2\,\vec{e_r} + r_1\,\ddot{\alpha}\,\vec{e_\alpha}$.

En projection sur $\vec{e_r}$, on obtient donc : $-mr_1\,\dot{\alpha}^2 = R - mgcos(\alpha)$.

Donc $\boxed{R = -mr_1\,\dot{\alpha}^2 + mgcos(\alpha)}$

1.3.2. Exprimons $\dot{\alpha}^2$ en fonction de α et des données de l'énoncé.

En appliquant à nouveau la conservation de l'énergie mécanique entre A et M, on peut écrire, comme précédemment,

$$v_M^2 = 2gr_1\left(1-cos(\alpha)\right)$$

Or $v_M^2 = (r_1\,\dot{\alpha})^2$

Donc $r_1\dot{\alpha}^2 = 2g\left(1-cos(\alpha)\right)$

Donc $R = -2mg\left(1-cos(\alpha)\right) + mgcos(\alpha)$

Donc $\boxed{R = mg(3cos(\alpha) - 2)}$

1.3.3. En B, $\boxed{R = -700\ N}$.

$R < 0$: cela signifie que le chariot a décollé avant de parvenir en B.

1.4. Le chariot quitte la piste lorsque $R = 0$, c'est-à-dire pour $\boxed{\alpha = Arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48°}$.

2.1. Le mouvement étant à présent rectiligne, choisissons un nouveau repère $\left(B, \vec{e_x}\,\vec{e_y}\right)$ avec $\vec{e_x}$ orienté suivant $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{e_y}$ orthogonal à la piste orienté vers le haut.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ mais avec $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$.

En projection sur $\vec{e_y}$, on obtient $0 = R - mg\,cos(\alpha_1)$.

Donc $\boxed{R = mg\,cos(\alpha_1)}$.

Numériquement, $\boxed{R = 6{,}9\ kN}$.

2.2. D'après 1.2.1., $v_M = \sqrt{2g\left[2\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1) - r_2\left(1 - cos(\theta)\right)\right]}$

Or $v_M = r_2\,\dot{\theta}$.

Donc $\boxed{r_2^2\dot{\theta}^2 = 2g\left[2\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1) - r_2\left(1 - cos(\theta)\right)\right]}$

2.3. Procédons exactement comme au 1.3.1. :

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au chariot dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le mouvement étant circulaire tant que le chariot est au contact du rail, nous utiliserons un repère centré sur en coordonnées polaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$. Le système est soumis à deux forces :

- Son poids : $\vec{P} = mg(cos(\theta)\,\vec{e_r} - sin(\theta)\,\vec{e_\theta})$
- La réaction du support : $\vec{R} = -R\,\vec{e_r}$.

Soit $\vec{a}$ l'accélération du chariot. La seconde loi de Newton s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$.

Or $\overrightarrow{O_2M} = r_2\,\vec{e_r}$ donc $\overrightarrow{v_M} = r_2\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ et $\vec{a} = -r_2\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r_2\,\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$.

En projection sur $\vec{e_r}$, on obtient donc : $-mr_2\,\dot{\theta}^2 = -R + mgcos(\theta)$.

Donc $R = mr_2\,\dot{\theta}^2 + mgcos(\theta)$.

En utilisant le résultat du 2.2.,

$$\boxed{R = mg\left[4\frac{r_1}{r_2}\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 2\frac{L}{r_2}\,sin(\alpha_1) + (3\,cos(\theta) - 2)\right]}$$

2.4.

2.4.1. Le chariot parcourt une boucle si :

- Il arrive en F avec une vitesse non nulle
- R ne s'annule pas quelque soit θ.

D'après 2.3., $R = m\frac{v_M^2}{r_2} + mgcos(\theta)$ donc la condition la plus contraignante porte sur R pour θ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Il faut donc que $\boxed{4\frac{r_1}{r_2}\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 2\frac{L}{r_2}\,sin(\alpha_1) - 5 > 0}$. ($R$ est minimale en $\theta = \pi$)

2.4.2. On en déduit directement que :

$$\boxed{L_2 = \frac{5\,r_2 - 4\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right)}{2\,sin(\alpha_1)}}$$

Numériquement, $\boxed{L_2 = 5{,}0\ cm}$

2.5. On veut que $R > \frac{1}{4}mg$.

Donc $4\left[4\frac{r_1}{r_2}\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 2\frac{L}{r_2}\,sin(\alpha_1) - 5\right] > 1$.

Donc $16\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 8\,L\,sin(\alpha_1) - 20\,r_2 > r_2$

$$\boxed{L_3 = \frac{21\,r_2 - 16\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right)}{8\,sin(\alpha_1)}}$$

Numériquement, $\boxed{L_3 = 5{,}4\ m}$

3.1. En l'absence de frottements, $v_G = v_D$.

Donc $v_G = \sqrt{2g[2\,r_1(1-cos(\alpha_1)) + L\,sin(\alpha_1)]}$

De plus, $L = L_3$ donc $L_3\,sin(\alpha_1) + 2\,r_1\,(1-cos(\alpha_1)) = \frac{21}{8}\,r_2$

Donc $\boxed{v_G = \frac{\sqrt{21\,g r_2}}{2}}$.

Numériquement, $\boxed{v_G = 10\,m.s^{-1}}$.

3.2. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre G et H : la variation d'énergie cinétique est égale au travail des forces.

Le poids et la réaction du support sont orthogonaux au support et ne travaillent donc pas. : seul la force de freinage travaille.

$\vec{f}$ est opposée au vecteur vitesse donc $W(\vec{f}) = -\frac{1}{4}mgd_s$

Don $E_c(H) - E_c(G) = -\frac{1}{4}mgd_s$.

Or $E_c(H) = 0$.

Donc $d_s = \frac{4E_c(G)}{mg}$. Or $E_c(G) = \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{21\,mgr_2}{8}$

$$\boxed{d_s = \frac{21\,r_2}{2}}$$

Numériquement, $\boxed{d_s = 21\,m}$.

Pour déterminer la longueur minimale de ce circuit, OH, dans les conditions de sécurité, il suffit d'additionner toutes les longueurs nécessaires :

$$OH = r_1\,sin(\alpha_1) + L_3\,cos(\alpha_1) + r_1\,sin(\alpha_1) + d_s$$

$$\boxed{OH = 2\,r_1\,sin(\alpha_1) + \frac{21\,r_2 - 16\,r_1\,(1-cos(\alpha_1))}{8\,sin(\alpha_1)}\,cos(\alpha_1) + \frac{21\,r_2}{2}}$$

Numériquement, $\boxed{OH = 28\,m}$