Problème : circuit à looping (inspiré de CAPES agro 2004)

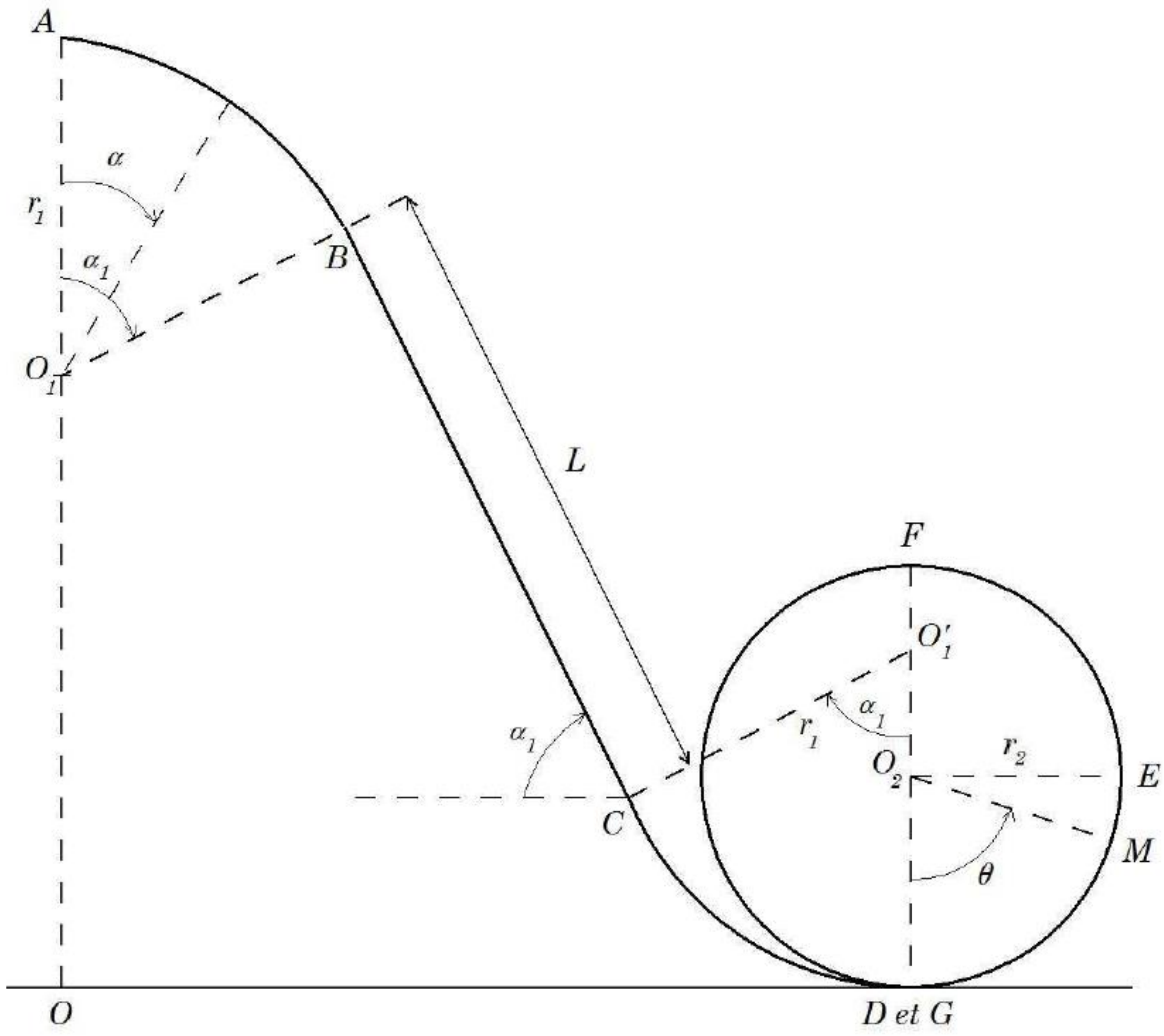
Un chariot de masse m de dimension négligeable se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Les frottements sont considérés comme négligeables.
Le rail est constitué de plusieurs parties :

- une portion de cercle AB (rayon r_1, angle α_1)
- une partie rectiligne BC de longueur L
- puis une portion de cercle CD de rayon r_1
- suivie d'un tour d'hélice : $DEFG$, de rayon r_2 et d'axe horizontal (voir schéma),
- prolongée par une portion rectiligne horizontale GH.

Les angles α et θ seront considérés positifs dans le sens indiqué sur la figure.

On considère pour la résolution de l'exercice que la portion de circuit constituée par un tour d'hélice et le segment rectiligne GH sont contenus dans le plan vertical de la section initiale.
La droite BC est tangente en B à la portion de cercle AB et est de même tangente en C à la portion de cercle CD.
Le chariot est lâché sans vitesse initiale du point A. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.
Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

<u>*Données*</u> : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $m = 1\ 000\ kg$; $r_1 = 2{,}5\ m$; $r_2 = 2{,}0\ m$.



1. Dans un premier temps $\alpha_1 = 50°$.
   1.1. Donner l'expression littérale de la norme de la vitesse du chariot en B, en C puis en D en fonction de r_1, L, α_1 et g.
   1.2. Etude des vitesses.
      1.2.1. Montrer que la norme de la vitesse du chariot à son passage en M sur l'hélice (assimilée à un cercle) repéré par l'angle θ peut s'écrire :
      $$v_M = \sqrt{2g\left[2\,r_1\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + L\,sin(\alpha_1) - r_2\left(1 - cos(\theta)\right)\right]}$$
      1.2.2. En déduire une condition sur L pour que le chariot arrive en $\left(\theta_E = \frac{\pi}{2}\right)$.
      1.2.3. Etablir l'expression littérale de la valeur limite de L notée L_1, pour que le chariot arrive en E. Calculer sa valeur.
   1.3. Etude de la tenue du chariot sur le rail lors de la première partie du parcours.
      1.3.1. Etablir l'expression de l'intensité de la réaction $\vec{R}$ de la piste en un point de la trajectoire entre A et B repéré par l'angle α en fonction de α, $\dot{\alpha}$, m, g et r_1.
      1.3.2. En déduire son expression en fonction de α, m et g.
      1.3.3. En déduire sa valeur numérique en B. Conclusion.
   1.4. Déterminer la valeur de α quand le chariot quitte la piste entre A et B.
2. A partir de cette question on va choisir une nouvelle valeur $\alpha_1 = 45°$, afin que le chariot ne quitte pas la piste entre A et B.
   2.1. Etablir l'expression de la norme de la réaction du rail sur sa partie rectiligne BC. Calculer sa valeur.
   2.2. Pour la partie circulaire de l'hélice, établir, à l'aide d'un théorème énergétique, l'expression de $r_2^2\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, g, r_1, r_2, α_1 et L (le chariot circule à l'intérieur du cercle).
   2.3. Montrer que la réaction du rail sur la partie circulaire (de rayon r_2) peut s'écrire :
   $$R = mg\left[4\frac{r_1}{r_2}\left(1 - cos(\alpha_1)\right) + 2\frac{L}{r_2}\,sin(\alpha_1) + (3\,cos(\theta) - 2)\right]$$
   2.4. Conditions de parcours de la boucle par le chariot.
      2.4.1. Déterminer la condition sur L pour que le chariot puisse parcourir la boucle.
      2.4.2. En déduire l'expression de la valeur minimale de L notée L_2. Calculer sa valeur numérique.
   2.5. Par raison de sécurité, on veut que la réaction du rail soit toujours supérieure au quart du poids du chariot. Déterminer la nouvelle valeur minimale L_3, permettant au chariot d'arriver en G en toute sécurité, après un tour. Calculer sa valeur numérique.
3. Sécurité
   3.1. On choisit $L = L_3$, le chariot se retrouve en G après voir effectué un tour. Déterminer v_G après ce tour en fonction de g et r_2. Application numérique.
   3.2. Il aborde alors la dernière partie rectiligne (GH) de la piste sur laquelle il subit une force de freinage $\vec{f}$ d'intensité constante $f = \frac{1}{4}mg$.

   Exprimer puis calculer la longueur minimale $d_s = GH$ de ce circuit à looping pour rester dans des conditions de sécurité.

   En déduire l'expression puis la valeur de la longueur minimale de ce circuit, OH, dans les conditions de sécurité.