l.

près) dont

énergie po-

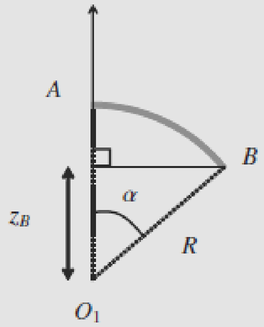
12.5

1. Le chariot est soumis à son poids et à la réaction du support normale au support puisqu'il n'y a pas de frottement. Cette force est donc aussi perpendiculaire à la vitesse et a un travail nul. Il ne reste donc qu'une force conservative, le poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur.

On a donc $Em = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ constante en prenant un axe Oz ascendant vertical et en repérant l'origine des altitudes en O_1. Alors, puisqu'on part avec une vitesse initiale nulle en A et que $z_B = R\cos(\alpha)$:

$$Em(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgR = mgR$$

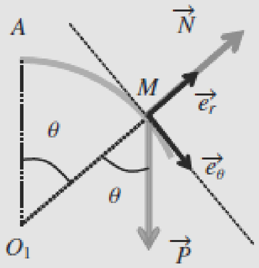
et $Em(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos(\alpha)$.



La conservation de l'énergie mécanique $Em(A) = Em(B)$ conduit alors à $mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos(\alpha)$ soit

$$v_B = \sqrt{2gR(1-\cos(\alpha))}$$

2. On se place en coordonnées cylindriques. Alors, si on repère par l'angle θ la position du chariot représenté par le point M, on a la situation suivante :



En projetant le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e_r}$, on a $-m\vec{a}.\vec{e_r} = -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos(\theta)$ soit $N = mg\cos(\theta) - mR\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - m\frac{v^2}{R}$ puisque sur un mouvement circulaire $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ d'où $v^2 = R^2\dot{\theta}^2$ donc $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$.

En substituant l'expression de v_B en $\theta = \alpha$, on obtient l'expression de la normale en B :

$$N_B = mg\cos(\alpha) - m\frac{v_B^2}{R} = mg(3\cos(\alpha) - 2)$$

Entre A et B, le chariot a une réaction

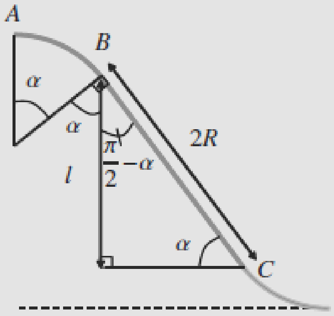
$$N = mg(3\cos(\theta) - 2) > 0$$

sinon il décolle. La condition est donc $\cos(\theta) > \frac{2}{3}$. Comme cosinus est une fonction décroissante, la condition la plus restrictive est pour $\theta = \alpha$: on doit donc avoir $\cos(\alpha) > \frac{2}{3}$ soit $\alpha < \text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$. Comme ici $\alpha = 30°$, le chariot ne décolle pas sur la portion AB.

3. Entre B et C, on écrit la conservation de l'énergie mécanique $Em(B) = Em(C)$ comme précédemment soit :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgz_C$$

d'où $v_C = \sqrt{v_B^2 + 2g(z_B - z_C)}$. Or d'après le schéma ci-dessous $z_B - z_C = l = 2R\sin(\alpha)$.



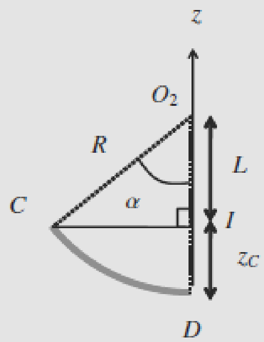
Alors en substituant l'expression de v_B, on trouve :

$$v_C = \sqrt{2gR(1 + 2\sin(\alpha) - \cos(\alpha))}$$

Sur la portion CD, on écrit une nouvelle fois la conservation de l'énergie mécanique $Em(C) = Em(D)$ soit :

$$v_D = \sqrt{v_C^2 + 2g(z_C - z_D)}$$

On peut repérer cette fois l'altitude par un axe Oz toujours ascendant (ceci est important car pour un axe Oz ascendant, on a $Ep = mgz$ et pour un axe descendant $Ep = -mgz$) avec l'origine prise en D soit $z_C - z_D = z_C$:



Alors $z_C = DO_2 - O_2I = R - L = R(1 - R\cos(\alpha))$ et après injection de l'expression de v_C :

$$v_D = \sqrt{4gR(1 + \sin(\alpha) - \cos(\alpha))}$$

Remarque : on aurait aussi pu prendre un axe Oz descendant avec origine en O_2, les énergies potentielles sont $Ep(D) = -mgz_D = -mgR$ pour D et pour C : $Ep(C) = -mgz_C = -mgR\cos(\theta)$. En écrivant alors la conservation de l'énergie mécanique avec ces deux nouvelles énergies potentielles, on retrouve exactement le même résultat.

Entre D et E, l'altitude ne varie pas donc l'énergie potentielle non plus. La conservation de l'énergie mécanique implique alors la conservation de l'énergie cinétique donc $v_E = v_D$.

Entre E et F, si on repère les altitudes toujours par un axe Oz ascendant avec origine en E, on trouve par analogie avec précédemment mais cette fois avec un rayon $2R$:

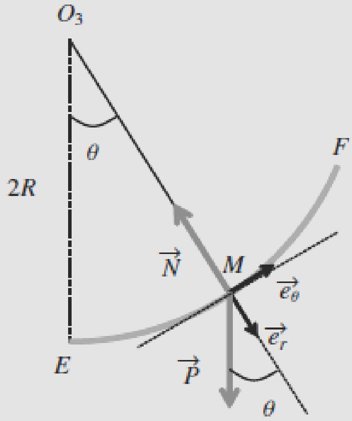
$$v_F = \sqrt{v_E^2 + 2g(z_E - z_F)} = \sqrt{v_E^2 - 2g.2R(1-\cos(\alpha))}$$

soit après développement et simplification des calculs :

$$v_F = \sqrt{v_E^2 - 4gR(1-\cos(\alpha))} = \sqrt{4gR\sin(\alpha)}$$

Les applications numériques donnent $v_E = 3{,}2$ m.s^{-1} et $v_F = 2{,}8$ m.s^{-1}.

4. De nouveau, on projette les forces dans la base cylindrique selon $\overrightarrow{e_r}$:



$$-m\overrightarrow{a}.\overrightarrow{e_r} = -m(2R)\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{2R} = -N + mg\cos(\theta)$$

Ici $r = 2R$ et il faut bien penser à en tenir compte dans l'expression de la vitesse et de l'accélération !

$$N = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{2R}$$

d'où par analogie avec le calcul précédent et avec la relation $v^2 = v_E^2 - 4gR(1-\cos(\theta))$:

$$N = m\frac{v_E^2}{2R} + 3mg\cos(\theta) - 2mg$$

5. Le chariot reste solidaire de la piste si $N > 0$ soit pour $v_E^2 > 2gR(2 - 3\cos(\theta))$.

Comme ici θ varie entre O et α, $\cos(\theta)$ varie entre 1 et $\cos(\alpha)$ donc

$$-2gR < 2gR(2-3\cos(\theta)) < 2gR(2-3\cos(\alpha))$$

Ainsi la condition la plus restrictive donne :

$$v_E^2 > 2gR(2-3\cos(\alpha))$$

Avec $\alpha = 30°$, $2gR(2-3\cos(\alpha)) = -4{,}7 < 0$ et la condition est vérifiée quelle que soit v_E il n'y a pas de risque que le chariot décolle sur la portion EF.

Comme $v^2 = v_E^2 - 4gR(1-\cos(\theta))$, la condition de non annulation de la vitesse conduit à $v^2 > 0$ soit

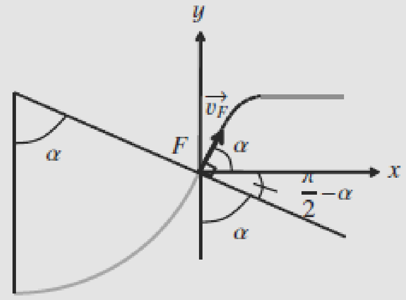
$$v_E^2 > 4gR(1-\cos(\theta))$$

et comme précédemment, la condition la plus restrictive sur EF est obtenue en α pour $v_E^2 > 4gR(1-\cos(\alpha))$.

Avec $\alpha = 30°$, $4gR(1-\cos(\alpha)) = 2{,}1$ m.s^{-1}. Ici on a $v_E = 3{,}2$ m.s^{-1} donc le chariot arrive bien en F.

On peut aussi voir ce résultat autrement : la dénivellation entre A et B d'une part et C et D d'autre part est de $R(1-\cos(\alpha))$ et celle entre B et C de $2R\sin(\alpha)$ soit une dénivellation totale entre A et D de $2R(1-\cos(\alpha)) + 2R\sin(\alpha)$. Or, entre D et F, on remonte de $2R(1-\cos(\alpha))$ soit au finale une position de F en dessous de A de $2R\sin(\alpha)$. Par conservation de l'énergie mécanique, on a forcément en F une vitesse non nulle et on retrouve aussi la valeur de v_F puisque $\frac{1}{2}mv_F^2 - 0 = 2mgR\sin(\alpha)$.

6. Comme le montre le schéma ci-dessous, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_F}$ fait un angle de α avec l'horizontale :



On se place en coordonnées cartésiennes avec le repère d'origine F comme repéré sur le schéma. Alors le chariot n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$ et le principe fondamental de la dynamique conduit à $m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{e_y}$ et

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

En utilisant la condition initiale sur la vitesse

$$\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v_F} = v_F\cos\alpha\overrightarrow{e_x} + v_F\sin\alpha\overrightarrow{e_y}$$

et en intégrant

$$\begin{cases} \dot{x} = v_F\cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_F\sin\alpha \end{cases}$$

puis par une seconde intégration avec la condition initiale $M(t=0) = F(0{,}0)$:

$$\begin{cases} x = v_F t\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_F t\sin\alpha \end{cases}$$

L'altitude maximale h est atteinte pour t_1 tel que $\dot{y}(t_1) = 0$ soit $t_1 = \frac{v_F\sin(\alpha)}{g}$ d'où

$$h = y(t_1) = -\frac{g}{2}t_1^2 + v_F\sin(\alpha)t_1 = \frac{v_F^2\sin^2(\alpha)}{2g}$$

La distance est donnée par

$$d = x(t_1) = v_F t_1 \cos(\alpha) = \frac{v_F^2 \cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}$$

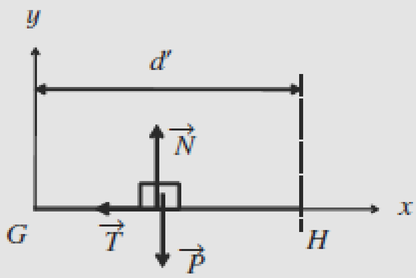
En remplaçant v_F par son expression, on obtient :

$$h = 2R\sin^3(\alpha) \qquad \text{et} \qquad d = 4R\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$$

On obtient alors $h = 10$ cm et $d = 35$ cm.

La vitesse en G est horizontale puisque $\dot{y}(t_1) = 0$ et elle vaut $v_G = \dot{x}(t_1) = v_F\cos(\alpha) = \sqrt{4Rg\sin(\alpha)}\cos(\alpha)$. Numériquement, on trouve $v_G = 2{,}4$ m.s^{-1}.

7. Sur la portion GH, le chariot est soumis à deux forces verticales : son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$ et la réaction normale du support $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e_y}$ et à une force horizontale $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_x}$ qui est la force de frottement solide. On a donc la situation suivante :



Selon $\overrightarrow{e_y}$, le principe fondamental de la dynamique conduit à $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ puisqu'il n'y a aucun mouvement selon cet axe. D'où $N = mg$. Or la loi de Coulomb pour un point mobile donne $T = f.N = fmg$.

Les deux forces $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{N}$ sont verticales et donc perpendiculaires à la vitesse : leur travail est donc nul. Si on applique le théorème de l'énergie cinétique entre G et H, il reste donc :

$$\Delta Ec(G \to H) = W_{G\to H}(\overrightarrow{P}) + W_{G\to H}(\overrightarrow{N}) + W_{G\to H}(\overrightarrow{T})$$

soit

$$\Delta Ec(G \to H) = W_{G\to H}(\overrightarrow{T})$$

et avec $W(\overrightarrow{T}) = \int_G^H \overrightarrow{T}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\int_{x_G}^{x_H} T.\mathrm{d}x$:

$$Ec(H) - Ec(G) = -T\int_{x_G}^{x_H} dx = -T(x_H - x_G) = -Td'$$

Avec $Ec(H) = 0$, $Ec(G) = \frac{1}{2}mv_G^2$ et $T = fmg$, on aboutit à :

$$-\frac{1}{2}mv_G^2 = -fmgd' \Longrightarrow d' = \frac{v_G^2}{2fg}$$

Au final, avec $v_G^2 = 4Rg\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$:

$$d' = \frac{2R\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}{f}$$

L'application numérique donne $d' = 50$ cm.

12.6

1. La seule force q
vement est son poid
mécanique se cons
(vitesse v_0, altitude
nulle) :

$\frac{1}{2}$

donc $z_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$

L'élastique est tend
déduit $v_{0,min} = \sqrt{2g}$

2. La balle n'est tou
cipe fondamental d
$m\ddot{z} = -mg$ donc $\ddot{z} =$

On intègre deux foi
$\dot{z}(0) = v_0$ puis $z(0) =$

$v = \dot{z} = -g$

3. Il faut résoudre z

dont le discriminant

lution physiquemen

4. D'après l'intégr
$t = \frac{v_0 - v}{g}$ soit en ré

$z =$

d'où l'expression z

On obtient donc un

On a aussi $Em = \frac{1}{2}$
nique se conserve. C
une autre expressio

$\frac{1}{2}mv^2$

5. L'allure est la sui
met vers le haut, il