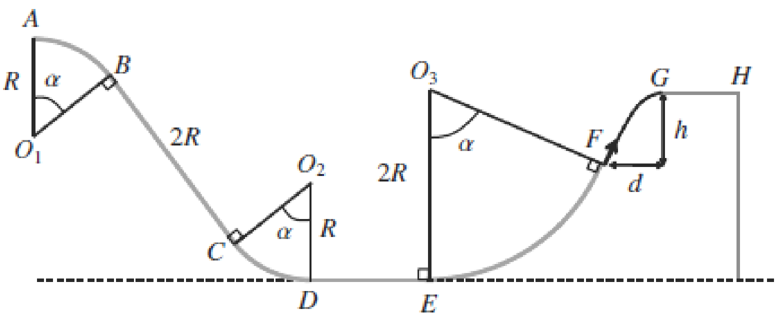
PROBLEME: CIRCUIT D'UNE FETE FORAINE

On considère le jeu d'enfants suivant composé d'un petit chariot mobile sur une piste de fête foraine miniature dans lequel reposent deux passagers miniatures. L'ensemble de masse m = 200 g et de dimension négligeable est mobile sans frottement (hors portion GH) sur cette piste située dans un plan vertical. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$. La piste est formée de plusieurs parties comme le montre la figure ci-dessous :



AB : partie circulaire de centre O_1, de rayon R = 40 cm et d'angle α = 30°.
BC : partie rectiligne inclinée de longueur 2R se raccordant tangentiellement à AB et CD.
CD : partie circulaire de centre O_2, de rayon R et d'angle α.
DE : partie rectiligne se raccordant tangentiellement à CD et EF.
EF : partie circulaire de centre O_2, de rayon 2R et d'angle α.
La piste est interrompue entre F et G. Le chariot décrit alors une portion de parabole qui se raccorde à la piste en G (sommet de la parabole). Puis il arrive sur la piste GH recouvert d'un revêtement rugueux et on veut qu'il s'arrête en H.

1. Le chariot est abandonné sans vitesse en A. Déterminer, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, sa vitesse v_B en B en fonction de g, R et α.
2. Montrer alors que la réaction du support N s'écrit en B sous la forme : $N_B = mg(3\cos(\alpha) - 2)$.
3. Pour quelle valeur de α le chariot quitte-t-il éventuellement la piste entre A et B? Faire l'application numérique. Que se passe-t-il ici ?
4. Déterminer, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, les vitesses du chariot aux points C, D, E puis F en fonction de g, R et α. On montrera notamment que $v_F = \sqrt{4gR\sin(\alpha)}$.
5. Faire l'application numérique pour v_E et v_F.
6. Calculer alors la réaction du support N en un point de la portion EF repéré par un angle θ quelconque (en F, on a θ = α). On exprimera N en fonction de m, g, v_E, R et θ.
7. Pour quelles valeurs de v_E^2 le chariot décollerait-t-il sur la portion EF ?
8. Pour quelles valeurs de v_E^2 le chariot aurait sa vitesse qui s'annule avant d'arriver en F ?

On s'intéresse à la portion de trajectoire parabolique FG (on rappelle que G est le sommet de la parabole). Le chariot n'est soumis qu'à son poids.

9. Déterminer littéralement en fonction de α, g et R les distances h (altitude maximale) et d nécessaires.
10. Exprimer également la vitesse v_G en fonction de v_F et α. Effectuer les applications numériques.

Sur la partie GH, il s'exerce une force de frottement solide $\vec{T}$ obéissant aux lois de Coulomb.

11. En notant f le coefficient de frottement dynamique, exprimer d'abord T en fonction de f, m et g.
12. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que la distance d'= GH à choisir pour que le chariot s'arrête en H est donnée par $d' = \dfrac{2R\sin(\alpha)\cos2(\alpha)}{f}$
13. Le coefficient de frottement est de f = 0,60. En déduire la distance d' minimale pour que le chariot ne tombe pas dans le vide.