1) Vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/_{\mathcal{R}}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM})_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(a\vec{e}_r)_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{V}(M/_{\mathcal{R}}) = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(M/_{\mathcal{R}}) = \frac{d}{dt}[\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})]_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{a}(M/_{\mathcal{R}}) = \frac{d}{dt}[a\dot{\theta}\vec{e}_\theta]_{\mathcal{R}} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

2) Application du principe fondamental de la dynamique.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}(M/_{\mathcal{R}}) = \vec{P} + \vec{R}$$

Ce qui donne :

$$mg\vec{\imath} - N\vec{e}_r = m(-a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$mg(cos\theta\vec{e}_r - sin\theta\vec{e}_\theta) - N\vec{e}_r = m(-a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$mgcos\theta - N = -ma\dot{\theta}^2 (1)$$

$$-mgsin\theta = ma\ddot{\theta} \qquad (2)$$

3) Multiplions l'équation (2) par $\dot{\theta}$ puis intégrons par rapport au temps t :

$$-mg\dot{\theta}sin\theta = ma\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$mgcos\theta = \frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 + C$$

Où C estnue constante déterminée par les conditions initiales à t = 0.

$$mg = \frac{1}{2}ma\frac{V_0^2}{a^2} + C$$

$$C = mg - \frac{1}{2}m\frac{V_0^2}{a}$$

Soit :

$$mgcos\theta = \frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 + mg - \frac{1}{2}m\frac{V_0^2}{a}$$

Finalement :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(cos\theta - 1) + \frac{V_0^2}{a^2}$$

4) Equation 1) donne :

$$N\ (\theta) = \ mgcos\theta + ma\dot{\theta}^2$$

En remplaçant $\dot{\theta}^2$ par son expression trouvée à la question précédente, on obtient :

$$N\ (\theta) = \ mgcos\theta + 2mg(cos\theta - 1\ ) + \frac{mV_0^2}{a}$$

Soit :

$$N\ (\theta) = \ m\left[\frac{V_0^2}{a} + g(3cos\theta - 2\ )\right]$$

5) Le point M est en contact avec le cercle tant que $N\ (\theta) > 0$, donc :

$$m\left[\frac{V_0^2}{a} + g(3cos\theta - 2\ )\right] > 0$$

Soit :

$$\frac{V_0^2}{a} > [g(2 - 3cos\theta\ )]$$

$$V_0 > \sqrt{ag(2 - 3cos\theta\ )} = \ V_{0\,min}$$