Par rapport à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, ($\vec{i}$ verticale ascendante). Une particule ponctuelle M, de masse m, placée dans un champ de pesanteur, peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon a (a constante strictement positive). Le point M est repéré par ces coordonnées polaires habituels : $(r = \|\overrightarrow{OM}\| = a, \theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{Oi},\overrightarrow{OM}}))$ tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r$. On lance cette particule avec une vitesse horizontale $\vec{V}_0 = V_0\vec{j}$ du point le plus bas du cercle (voir figure). A t = 0, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \frac{V_0}{a}$.
Le point M est soumis dans tout l'exercice aux seules forces suivantes : le poids $\vec{P}$ et à la réaction du cercle $\vec{R} = -N\vec{e}_r$, N fonction inconnue du problème. Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

1) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})$ et accélération $\vec{a}(M/_{\mathcal{R}})$.
2) Par application du principe fondamental déterminer deux équations différentielles vérifiées par le mouvement du point M dans le repère $\mathcal{R}$.
3) Déterminer une équation de la forme : $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.
4) Montrer que la réaction $N(\theta)$ peut être exprimée sous la forme algébrique :

$$N(\theta) = m\left[\frac{V_0^2}{a} + g(3\cos\theta - 2)\right].$$

5) Montrer que le point M reste en contact avec le cercle $(\mathcal{C})$ pendant son mouvement, lorsque la vitesse initiale est supérieure valeur minimale $V_{0\,min}$ que l'on déterminera en fonction de g , a et θ.