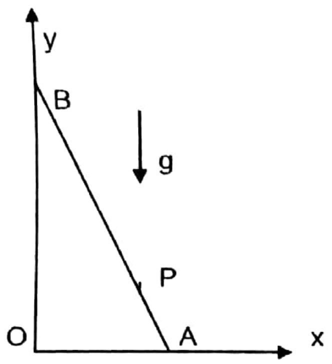
PROBLEME 3 MECANIQUE

PARTIE I



1.a) vecteur position $\overrightarrow{OA}$ = 2L.sin(θ) $\vec{i}$

1.b) vecteur position $\overrightarrow{OB}$ = 2L.cos(θ) $\vec{j}$

1.c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ = 2L.(cos(θ) $\vec{j}$ -sin(θ) $\vec{i}$)

2.a) la barre AB étant homogène, le centre d'inertie G est au milieu de AB :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2.b) $\overrightarrow{OG}$ = 2L.sin(θ) $\vec{i}$ + L.(cos(θ) $\vec{j}$ -sin(θ) $\vec{i}$) = L.sin(θ) $\vec{i}$ + L.cos(θ) $\vec{j}$

OG = L = cte : G décrit le cercle de centre O, de rayon L.

3.a) soit P un point quelconque de AP : r = AP d'où $\overrightarrow{AP}. = \frac{r}{2L}\overrightarrow{AB} = r$.(cos(θ) $\vec{j}$ -sin(θ) $\vec{i}$)

D'où $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = r$.cos(θ) $\vec{j}$ + (2L-r)sin(θ) $\vec{i}$

Soit x et y les coordonnées de P : x = (2L-r)sin(θ) et y = r.cos(θ)

3.b) x et y vérifient l'équation : $\frac{x^2}{(2L-r)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$: éq d'une ellipse de centre O, d'axes Ox et Oy, de demi grand axe 2L-r selon Ox, de demi petit axe r selon Oy.

3.c) pour r = L/2, a = 3L/2, b =L d'où la courbe

4.a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A}$ - 2L $\frac{d\theta}{dt}$.(sin(θ) $\vec{j}$ + cos(θ) $\vec{i}$)

4.b) la composante de $\overrightarrow{V_B}$ sur Ox doit être nulle : $\overrightarrow{V_A}$ - 2L $\frac{d\theta}{dt}$ .cos(θ) $\vec{i} = \vec{0}$ d'où $\frac{d\theta}{dt} = V/(2L.\cos(\theta))$.

4.c) $\overrightarrow{V_B}$ = - V tan(θ) $\vec{j}$

5.a) d'après 2.b) $\overrightarrow{V_G}$ = L$\frac{d\theta}{dt}$ (cos(θ) $\vec{i}$ – sin(θ) $\vec{j}$)

5.b) $\overrightarrow{V_G}$= ½.V ($\vec{\imath} - tan(\theta)\,\vec{\jmath}$)

6. accélération de G : $\overrightarrow{a_G}$ = L$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ $(cos(\theta)\,\vec{\imath}$ – sin(θ) $\vec{\jmath}$) – L.($\frac{d\theta}{dt}$)^2.($sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$)

7.a) $\overrightarrow{V_P}$ = $\frac{d\theta}{dt}$.(− r.sin(θ) $\vec{\jmath}$ + (2L-r)cos(θ) $\vec{\imath}$)

7.b) $\overrightarrow{V_P}$ = V.(− $\frac{r}{2L}$.tan(θ) $\vec{\jmath}$ + (1− $\frac{r}{2L}$) $\vec{\imath}$)

7.c) r = 0 on retrouve bien la vitesse de A

r = L : on retrouve bien la vitesse de G

r = 2L : on retrouve bien la vitesse de B

PARTIE II

8 : les actions de contact en A et B étant sans frottement, $\overrightarrow{R_A}$ est portée par $\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{R_B}$ est portée par $\vec{\imath}$

la puissance de la force $\overrightarrow{R_A}$ appliquée en A est $\overrightarrow{R_A}\,.\,\overrightarrow{V_A} = 0$. De même pour $\overrightarrow{R_B}$.

9.a) énergie potentielle de pesanteur : $E_p = Mgy_G$

9.b) la résultante des poids des différents éléments de la barre est M$\vec{g}$ appliquée en G
Le travail élémentaire du poids est δW = M$\vec{g}$. $\overrightarrow{V_G}$. dt = -d(Mgy_G) = -dE_p
d'où $E_p = mgy_G$ (référence en y_G =0)

9.c) E_p = MgLcos(θ)

10.a) Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{MV^2}{6cos^2\theta}$ + MgLcos(θ)
10.b) Th de l'énergie mécanique : la variation de l'énergie mécanique entre deux instants t et t+dt est égale au travail élémentaire des forces non conservatives, ici ce travail est nul (pas de frottement), donc E_m = cte. (ou le système est conservatif car les forces de frottement ne travaillent pas)
10.c) à t=0 : V=0 et θ = 0 donc E_m = MgL

11.a) $V^2 = 6gL\cos^2\theta\,(1-\cos\theta)$
11.b) $(\frac{d\theta}{dt})^2 = 3g(1-cos\theta)/(2L)$
11.c) on dérive l'équation précédente : $2\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{2L}$ sinθ $\frac{d\theta}{dt}$ d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{4L}$ sinθ

PARTIE III

12 $\overrightarrow{a_G}$ = L$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ $(cos(\theta)\,\vec{\imath}$ – sin(θ) $\vec{\jmath}$) – L.($\frac{d\theta}{dt}$)^2.($sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$)

= 3/4.g sinθ $(cos(\theta)\,\vec{\imath}$ – sin(θ) $\vec{\jmath}$) – 3/2$g(1-cos\theta)$.($sin(\theta)\,\vec{\imath} + cos(\theta)\,\vec{\jmath}$)

= g sinθ ($\frac{9}{4}cos(\theta)$-3/2) $\vec{\imath}$ + g (3/2.cos² θ -3/4. Sin² θ -3/2 cos θ) $\vec{\jmath}$

13. a) th de la résultante dynamique : M $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + M\vec{g}$

13.b) : $\overrightarrow{R_B}$ = g sinθ $(\frac{9}{4}cos(\theta)$-3/2) $\vec{i}$

13.c) $\overrightarrow{R_A} = \frac{1}{4}Mg(1 - 6cos\theta + 9cos^2(\theta))\vec{j}$

14. $\overrightarrow{R_B}$ s'annule pour θ = arc cos(2/3)

Le contact cesse en A avant B.