PROBLEME

On considère une barre AB homogène, de centre d'inertie G, ***de longueur 2L***, d'épaisseur négligeable et de masse M (qui pourrait par exemple modéliser une échelle), glissant sous l'effet de son poids le long d'un mur. Le point A est en contact avec le sol (supposé parfaitement horizontal et servant d'axe cartésien Ox) et le point B est en contact avec le mur (supposé parfaitement vertical et servant d'axe cartésien Oy).

Les notations sont celles de la figure 4 page 8/10. On suppose que les points A et B restent en contact avec le sol et le mur au cours du mouvement de la barre.

Les calculs des vecteurs seront faits dans la base cartésienne orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure 4. Les vecteurs demandés pourront être mis soit sous la forme « en ligne» : $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$, soit sous la forme « en colonne » : $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$.

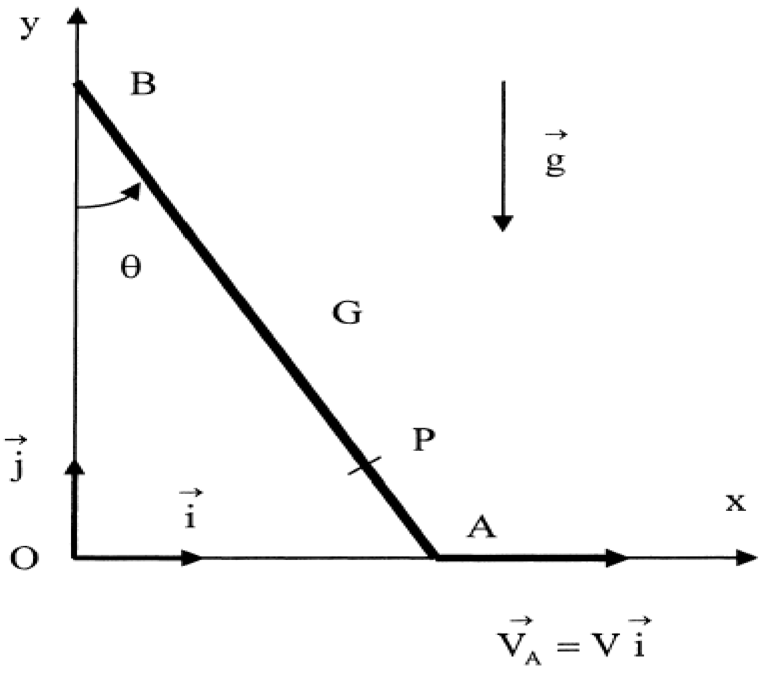
On note V la norme de la vitesse du point A (V dépend du temps). Le vecteur vitesse du point A peut donc s'écrire $\vec{V}_A = V \vec{i}$.

On note θ l'angle orienté entre le mur et la barre.

La position d'un point P quelconque de la barre est repérée par la distance r = AP.

Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et noté $\vec{g} = -g \vec{j}$ $(g > 0)$.

Le référentiel d'étude (dans lequel le système d'axes Ox Oy est fixe) est supposé galiléen.



Partie I : Etude cinématique du mouvement.

1.

a. Exprimer le vecteur position $\vec{OA}$ du point A en fonction de L, θ et $\vec{i}$.

b. Exprimer le vecteur position $\vec{OB}$ du point B en fonction de L, θ et $\vec{j}$.

c. Exprimer le vecteur $\vec{AB}$ en fonction de L, θ, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2.

a. Montrer que le vecteur position du point G est tel que $\vec{OG} = \vec{OA} + \frac{\vec{AB}}{2}$.

b. Exprimer le vecteur position $\vec{OG}$ du point G en fonction de L, θ, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Montrer que la trajectoire du point G est un arc de cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3.

a. Exprimer le vecteur position $\vec{OP}$ d'un point P quelconque de la barre AB en fonction de L, r, θ, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b. Montrer que la trajectoire de ce point P est une portion d'ellipse, dont on précisera le centre, les axes et les longueurs de ces axes (on supposera r < L).

c. Représenter l'allure de cette portion d'ellipse lorsque $r = \frac{L}{2}$.

4.

a. En remarquant que $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$, déterminer la relation donnant la vitesse $\vec{V}_B$ du point B en fonction de $\vec{V}_A$, L, θ, $\frac{d\theta}{dt}$ (dérivée de θ par rapport au temps), $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b. En remarquant que la vitesse du point B doit être orientée parallèlement à $\vec{j}$, montrer que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{2L\cos\theta}$.

c. Exprimer alors la vitesse du point B uniquement en fonction de V, θ et $\vec{j}$.

5.

a. En vous servant de la question 2.b, donner l'expression de la vitesse $\vec{V}_G$ du point G en fonction de L, θ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b. En déduire en utilisant la question 4.b l'expression de la vitesse $\vec{V}_G$ du point G en fonction de θ, V, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

6. Déterminer l'expression de l'accélération a_G du point G en fonction de L, θ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (dérivée seconde de θ par rapport au temps), $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

7.

   a. En vous servant de la question 3.a, donner l'expression de la vitesse $\vec{V}_P$ d'un point quelconque P en fonction de L, r, θ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   b. En déduire, en utilisant la question 4.b, l'expression de la vitesse $\vec{V}_P$ d'un point quelconque P en fonction de r, L, θ, V, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   c. Vérifier en prenant pour r les valeurs L et 2L que vous retrouvez les résultats des questions 5.b et 4.c.

Partie II : Etude énergétique du mouvement, relation entre V et θ.

On suppose que la barre est soumise uniquement à son poids et aux deux actions de contact $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ en A et B. On suppose que ces deux actions de contact sont sans frottement.

8. ***Montrer*** que les puissances de ces actions de contact en A et B sont nulles.

9.

   a. ***Donner*** l'énergie potentielle de pesanteur E_p de la barre en fonction de M, g et y_G (y_G représentant l'ordonnée cartésienne du point G). On prendra par convention l'énergie potentielle nulle quand $y_G = 0$.
   b. ***Démontrer*** la formule précédente en utilisant la définition d'une énergie potentielle.
   c. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de M, g, L et θ.

On admet pour la suite du problème que l'énergie cinétique E_C de la barre vaut $E_C = \frac{MV^2}{6\cos^2\theta}$.

10.

   a. Définir et calculer l'énergie mécanique de la barre en fonction de M, V, g, L et θ.
   b. Justifier très clairement que l'énergie mécanique de la barre est constante.

c. Donner la valeur de l'énergie mécanique en fonction de M, g et L, si on suppose qu'au début du mouvement la barre est quasiment verticale avec une vitesse initiale quasiment nulle.

11.

a. En déduire V^2 en fonction de g, L et θ au cours du mouvement.

b. Déduire de la question précédente et de la question 4.b, la relation donnant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ en fonction de g, L et θ.

c. Déduire de la question précédente la relation donnant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, dérivée seconde de θ par rapport au temps, en fonction de g, L et θ.

Partie III : Etude dynamique du mouvement, vérification de l'hypothèse initiale de contact de la barre avec le sol et le mur.

Le but de cette partie est de trouver l'expression des actions de contact en A et B afin de vérifier si l'hypothèse de contact de la barre en A et B au cours du mouvement est bien valable.

12. En utilisant les questions 6, 11.b et 11.c, exprimer $\vec{a}_G$ en fonction de g, θ, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

13.

a. En appliquant le théorème de la résultante dynamique, donner la relation liant M, $\vec{a}_G$, $\vec{g}$, $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$.

b. En projetant l'équation précédente parallèlement à $\vec{i}$, en déduire $\vec{R}_B$ en fonction de M, g, θ et $\vec{i}$.

c. En projetant la même équation parallèlement à $\vec{j}$, en déduire $\vec{R}_A$ en fonction de M, g, θ et $\vec{j}$.

14. Montrer que $\vec{R}_B$ peut s'annuler pour une valeur de θ (différente de zéro !) qu'on déterminera.

15. On montre par un calcul similaire que $\vec{R}_A$ peut s'annuler pour θ = Arccos ($\frac{1}{3}$). Quelle conclusion tirez-vous de ces deux derniers résultats quant à l'hypothèse de contact de la barre avec le mur et le sol ?